Tentamen i MSG100 Sannolikhetsteori 1, Göteborgs Universitet. Deltentamen 2, 7.5 hp.

Tid: Torsdagen den 12 Januari 2012, 8.30-12.30.

Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.

Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. Du kastar en vanlig **6**-sidig tärning **6** gånger. Vad är
   a) Sannolikheten att du får utfallen **1,2,3,4,5 och 6** i precis denna ordning. (1p)
   b) Sannolikheten att du får utfallen **1,2,3,4,5 och 6** i vilken ordning som helst. (1p)
   c) Exakt **3** utfall som är **6**. (1p)
   d) Inga utfall som är **5** eller **6**. (1p)

2. Du har en rektangel med sidorna **X** cm och **Y** cm, där **X** och **Y** är stokastiska variabler som är oberoende med ändliga väntevärden och varianser **E[X]**, **E[Y]**, respektive **Var[X]** och **Var[Y]**.

   a) Varför är då väntevärdet av rektangelns yta = **E[X]E[Y]**? (2p)
   b) Uttryck variansen för ytan som en funktion av **E[X],E[Y],Var[X]** och **Var[Y]**. (2p)

3. Du utför en serie av oberoende försök och observerar huruvida en viss händelse **A** inträffar eller ej. Antalet försök som du behöver utföra för att händelsen skall inträffa **15** gånger är en stokastisk variabel **Y**. Sannolikheten för att A skall inträffa i en enskild försöksupprepning är **p**.

   a. Bestäm sannolikheten för händelsen **Y=16** (som funktion av **p**). (1p)
   b. Bestäm sannolikheterna för händelserna **Y=k** för alla positiva heltal **k**. (1p)
   c. Bestäm den betingade sannolikheten för att **{Y=15}** givet att **{Y<18}**. (2p)

4. Du sitter och väntar på telefonsamtal från **10** av dina klasskamrater som alla uppmanats att ringa dig efter klockan **15.00** en viss dag. Om du antar att de försöker ringa dig oberoende av varandra och vid tidpunkter **15.00+Xi**, där alla **Xi** är oberoende av varandra och exponentialfördelade med väntevärden **0.5** timmar (=**30** minuter). Vad blir då sannolikheten att ingen har ringt dig före klockan **15.10**? (3p)

5. Kostnaden för att garantireparera en dammsugare av ett visst fabrikat som fått ett fel under garantitiden på **2** år kan antas vara en stokastisk variabel med väntevärdet **350** kronor och standardavvikelsen **100** kronor. Vad är approximativt sannolikheten att 300 sådana garantireparationer totalt kostar mer än **110.000** kronor? (3p)

6. En multinomialfördelad stokastisk vektor (flerdimensionell stokastisk variabel) **($X_1,X_2,\ldots X_k$)** uppkommer som bekant genom att man räknar antalet gånger som var och en av händelserna i en partition (med **k** händelser) av ett visst utfallsrum inträffar i en serie med n oberoende försöksupprepningar. Detta gör att varje **X_i**-komponent blir binomialfördelad (med sannolikhetsparameter som är sannolikheten p_i för respektive händelse), men **X_i**-komponenterna blir beroende.

   a) Vad är kovariansen mellan två olika komponenter **X_i** och **X_j**? (1p)
   b) Vad är korrelationen mellan två olika komponenter **X_i** och **X_j**? (1p)
   c) Vilken fördelning får summan av två olika komponenter **X_i** och **X_j**? (1p)
   d) Vad är väntevärdet och variansen för **X_i-X_j**, differensen mellan två olika komponenter? (2p)

7. Ge exempel på ett sannolikhetsförsök med **3** händelser **A, B** och **C** som är sådana att sannolikheterna **P(A)=P(B)=P(C)= 0.5** och där händelsen **A** är oberoende av händelsen **B**, händelsen **B** är oberoende av händelsen **C**, men händelserna **A** och **C** inte kan inträffa samtidigt. (3p)

8. Markovs olikhet handlar som bekant om att uppskatta sannolikheter för svanshändelser för en positiv stokastisk variabel **X** med en övre begränsning. Genom att använda väntevärden av positiva monotona funktioner av en inte nödvändigtvis positiv stokastisk variabel **X** kan man få alternativa uppskattningar uppåt av sannolikheterna för samma händelser med liknande teknik.

   a) Låt **X** vara positiv och låt **Y=exp(X)** och anta att **E[Y]=1.20** . Använd detta för att uppskatta **P(X>15)**. (2p)
   b) Med momentgenererande funktion **M(t)=E[exp(tX)]** kan man använda(och modifiera) tekniken i a-uppgiften för att uppskatta ännu bättre genom att t.ex. variera över alla fixa **t>0** och därigenom få en uppskattning av **P(X>c)**, säg **g(t),** för varje sådant **t>0**. Hur ser en sådan uppsättning av uppskattningar **g(t), t>0** ut för sannolikheten **P(X>5)** när **X** är Normalfördelad **(0,1)**? (2p)